Αριθμητική για υπολογιστές

- Λειτουργίες (πράξεις) σε ακεραίους
  - Πρόσθεση και αφαίρεση
  - Πολλαπλασιασμός και διαίρεση
  - Χειρισμός της υπερχείλισης
- Πραγματικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating-point)
  - Αναπαράσταση και λειτουργίες (πράξεις)

Ακέραια πρόσθεση

- Παράδειγμα: 7 + 6

		(0)		*(0)*		*(1)*		*(1)*		*(0)*		*(Κρατούμενα)*
…		0		0		0		1		1		1
…		0		0		0		1		1		0
…	(0)	0	(0)	0	(0)	1	(1)	1	(1)	0	(0)	1

- Υπερχείλιση (overflow) αν το αποτέλεσμα είναι εκτός του εύρους των τιμών
  - Πρόσθεση ετερόσημων τελεστέων, όχι υπερχείλιση
  - Πρόσθεση θετικών τελεστέων
    - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 1
  - Πρόσθεση αρνητικών τελεστέων
    - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 0

Ακέραια αφαίρεση

- Πρόσθεση του αντιθέτου του δεύτερου τελεστέου
- Παράδειγμα: 7 – 6 = 7 + (–6)

+7:	0000 0000 … 0000 0111
–6:	1111 1111 … 1111 1010
+1:	0000 0000 … 0000 0001

- Υπερχείλιση αν το αποτέλεσμα είναι εκτός του εύρους των τιμών
  - Αφαίρεση δύο θετικών ή δύο αρνητικών, όχι υπερχείλιση
  - Αφαίρεση θετικού από αρνητικό τελεστέο
    - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 0
  - Αφαίρεση αρνητικού από θετικό τελεστέο
    - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 1

Χειρισμός της υπερχείλισης

- Μερικές γλώσσες (π.χ., C) αγνοούν την υπερχείλιση
  - Χρησιμοποιούν τις εντολές του MIPS `addu`, `addui`, `subu`
- Άλλες γλώσσες (π.χ., Ada, Fortran) απαιτούν τη δημιουργία μιας εξαίρεσης
  - Χρησιμοποιούν τις εντολές του MIPS `add`, `addi`, `sub`
  - Στην υπερχείλιση, καλείται ο χειριστής εξαιρέσεων
    - Αποθήκευση του PC στο μετρητή προγράμματος εξαιρέσεων (exception program counter – EPC)
    - Άλμα στην προκαθορισμένη διεύθυνση του χειριστή
    - Η εντολή `mfc0` (move from coprocessor reg) μπορεί να ανακτήσει την τιμή του EPC, για να γίνει επιστροφή μετά τη διορθωτική ενέργεια

Αριθμητική για πολυμέσα

- Η επεξεργασία γραφικών και πολυμέσων επενεργεί σε διανύσματα των 8 και 16 bit
  - Χρήση ενός αθροιστή των 64 bit, με διαμερισμένη αλυσίδα κρατουμένων
    - Επενεργεί σε διανύσματα 8×8 bit, 4×16 bit, ή 2×32 bit
  - SIMD (single-instruction, multiple-data)
- Λειτουργίες «κορεσμού» (saturation)
  - Σε υπερχείλιση, το αποτέλεσμα είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να αναπαρασταθεί
    - σύγκριση με την αριθμητική υπολοίπου (modulo arithmetic) σε συμπλήρωμα ως προς 2
  - π.χ., «ψαλιδισμός» (clipping) στην επεξεργασία ήχου, «κορεσμός» στην επεξεργασία βίντεο

Πολλαπλασιασμός

- Ξεκινάμε με τον πολ/σμό μεγάλου μήκους

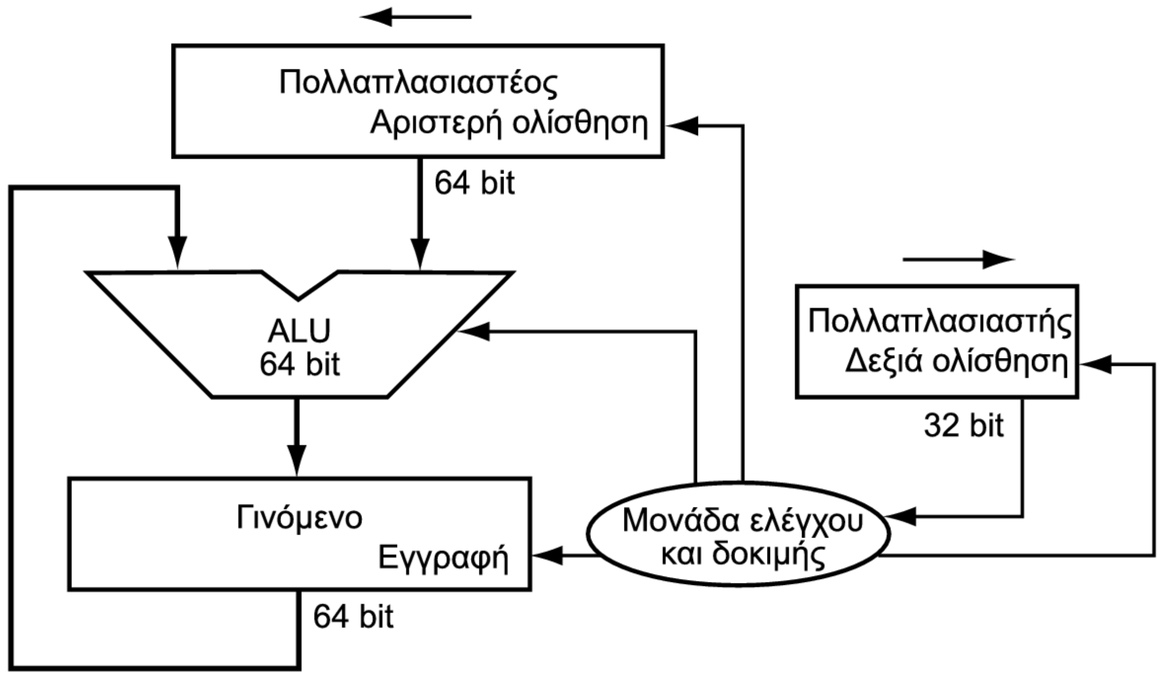
πολλαπλασιαστέος

πολλαπλασιαστής

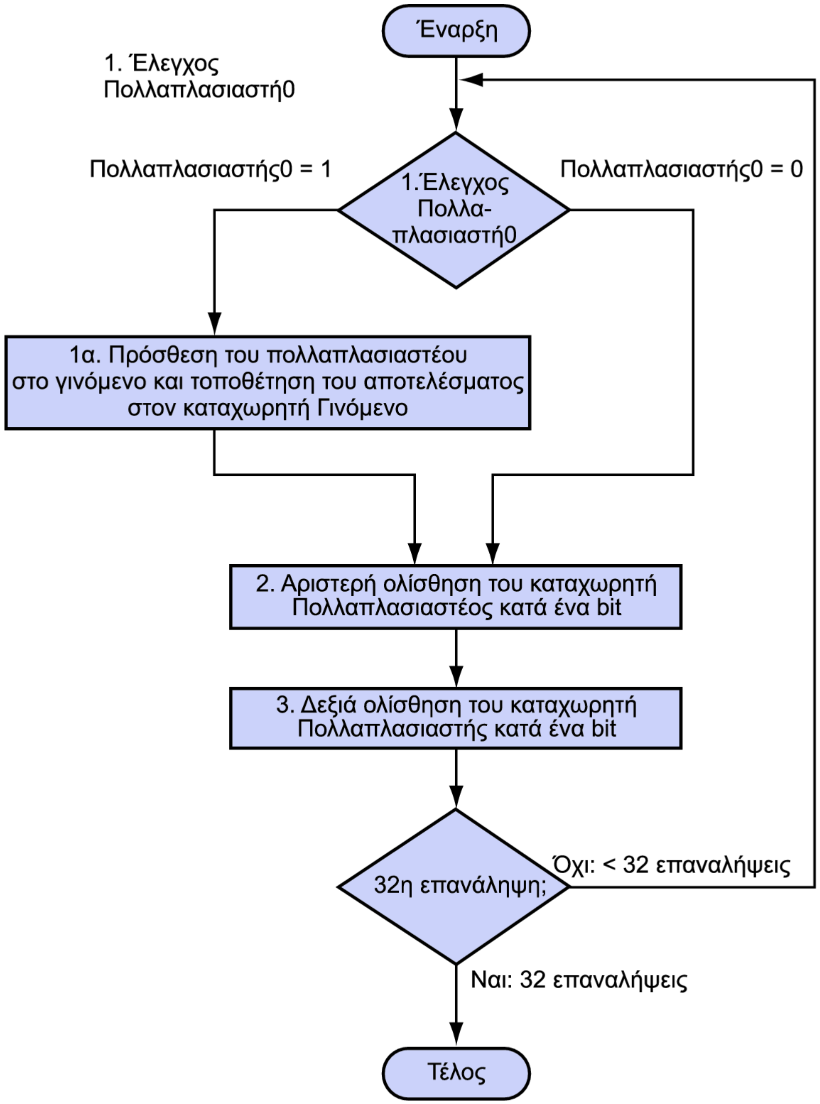
```
       1000
  ×    1001
  ---------
       1000
      0000
     0000
    1000
  ---------
    1001000
```

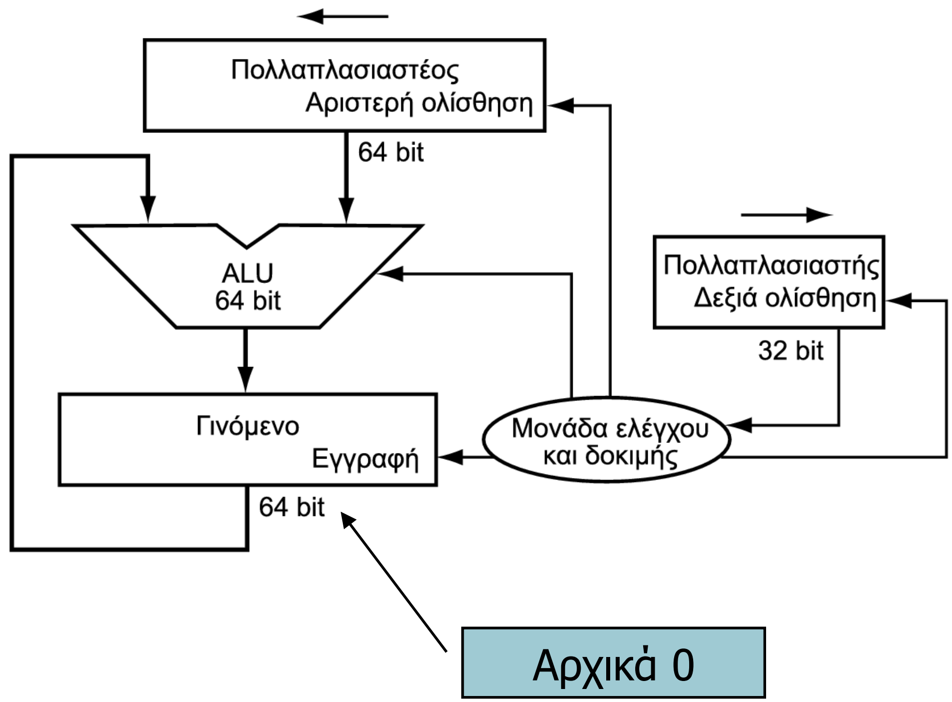
γινόμενο

Το μήκος του γινομένου είναι το άθροισμα των μηκών των τελεστέων



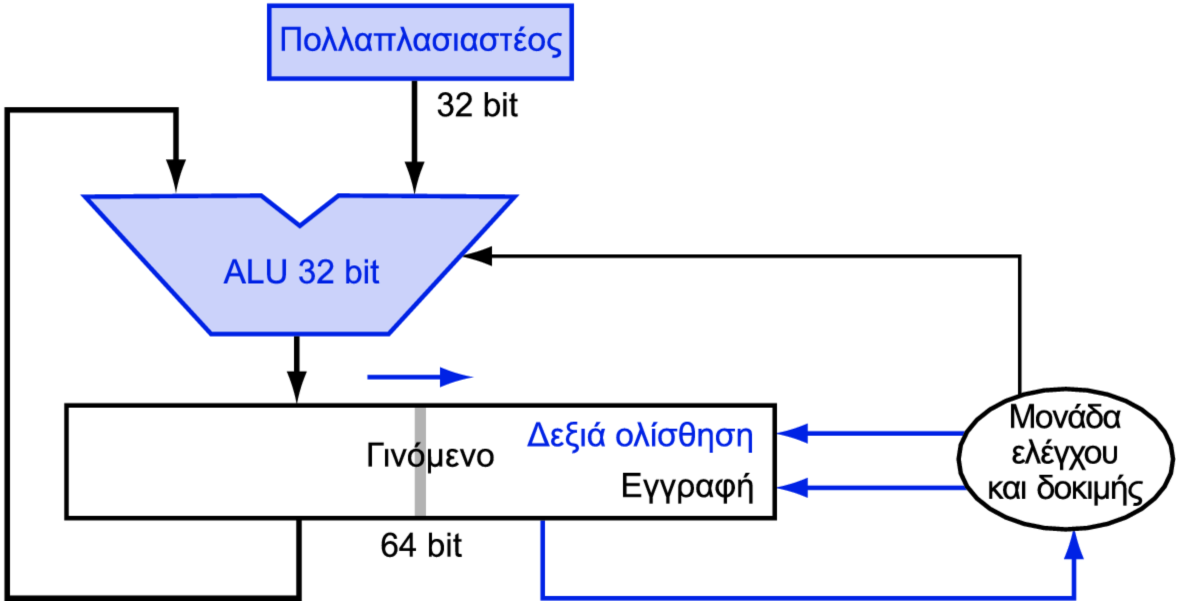
Υλικό πολλαπλασιασμού





Βελτιστοποιημένος πολλαπλασιαστής

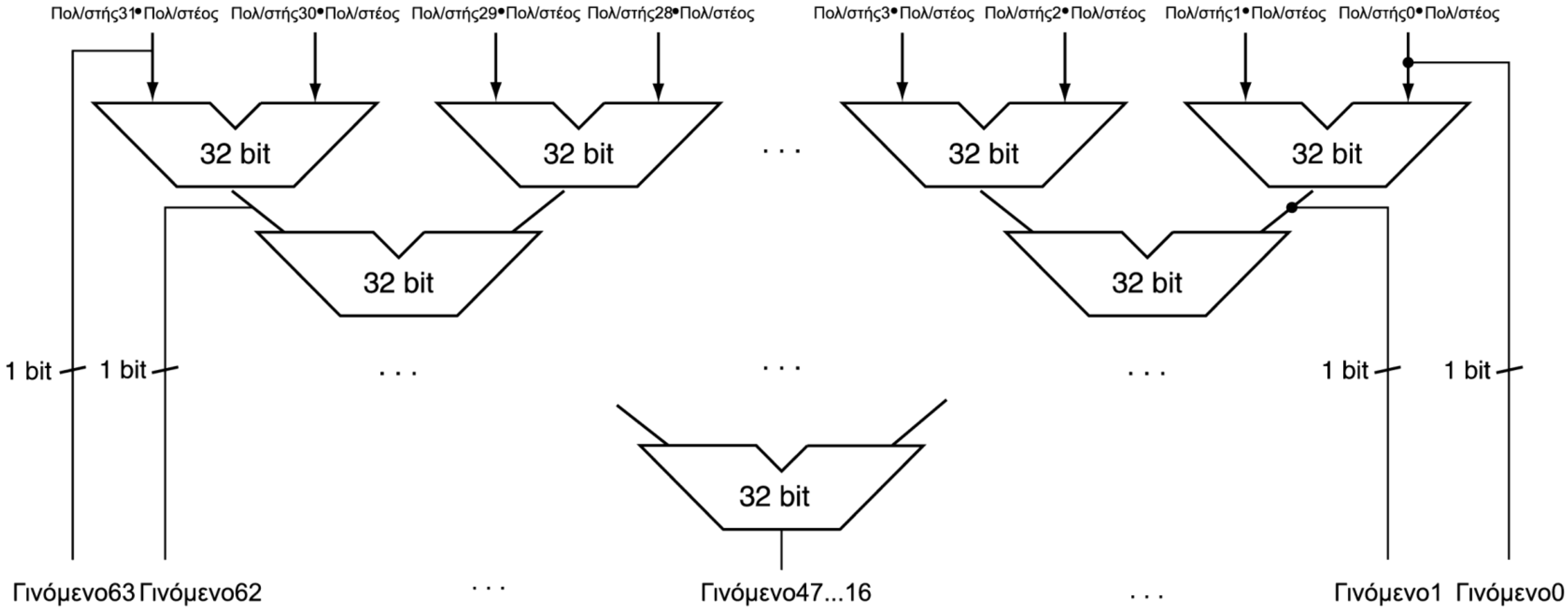
- Εκτέλεση βημάτων παράλληλα: πρόσθεση/ολίσθηση



- Ένας κύκλος ανά πρόσθεση μερικού γινομένου
  - Είναι εντάξει, αν η συχνότητα εμφάνισης του πολλαπλασιασμού είναι χαμηλή

Ταχύτερος πολλαπλασιαστής

- Χρησιμοποιεί πολλούς αθροιστές
  - Συμβιβασμός κόστους/απόδοσης



- Μπορεί να υλοποιηθεί με διοχέτευση (pipeline)
  - Πολλοί πολλαπλασιασμοί εκτελούνται παράλληλα

Πολλαπλασιασμός στον MIPS

- Δύο καταχωρητές των 32 bit για το γινόμενο
  - HI: τα περισσότερο σημαντικά 32 bit
  - LO: τα λιγότερο σημαντικά 32 bit
- Εντολές
  - `mult rs, rt  /  multu rs, rt`
    - γινόμενο των 64 bit στους HI/LO
  - `mfhi rd  /  mflo rd`
    - Μεταφορά από (move from) του HI/LO στον rd
    - Μπορούμε να ελέγξουμε τη τιμή του HI για να δούμε αν το γινόμενο ξεπερνά τα 32 bit
  - `mul rd, rs, rt`
    - Τα λιγότερο σημαντικά 32 bit του γινομένου –> rd

Διαίρεση

πηλίκο

διαιρετέος

```
            1001
1000 ) 1001010
      -1000
          10
          101
          1010
         -1000
            10
```

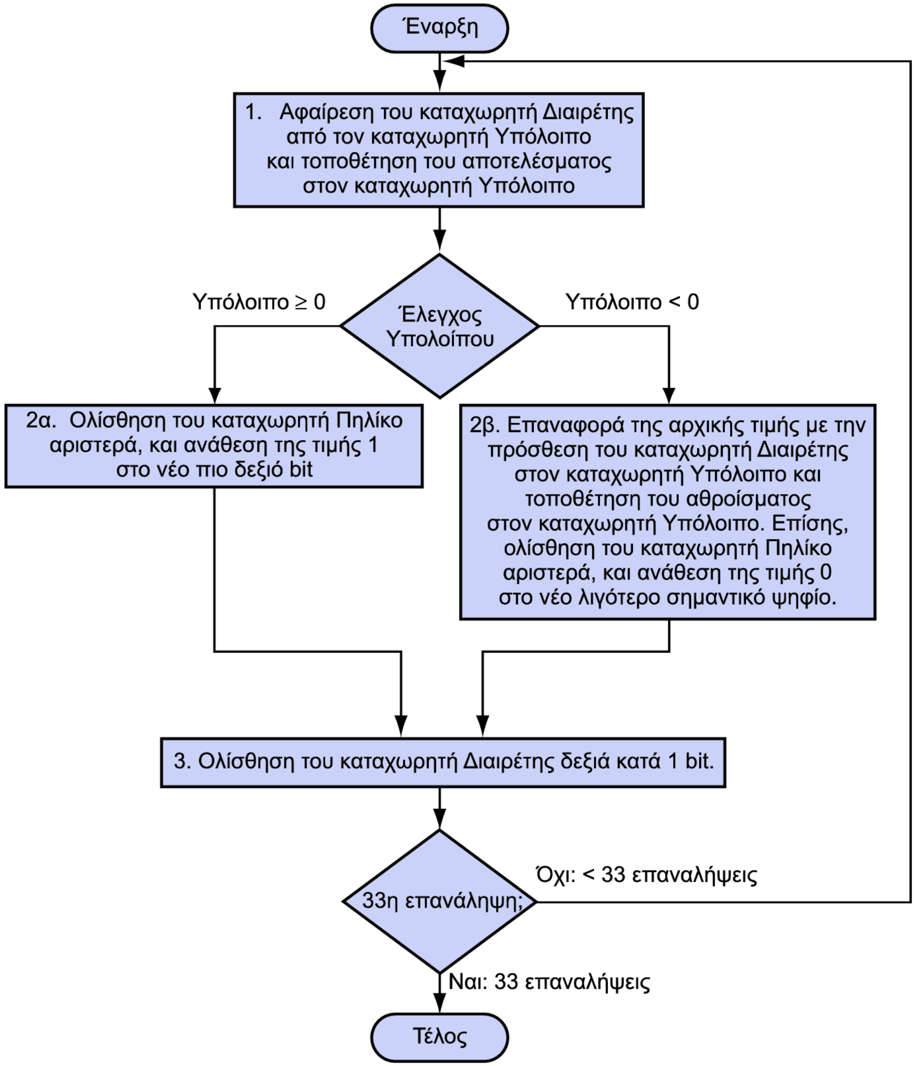
διαιρέτης

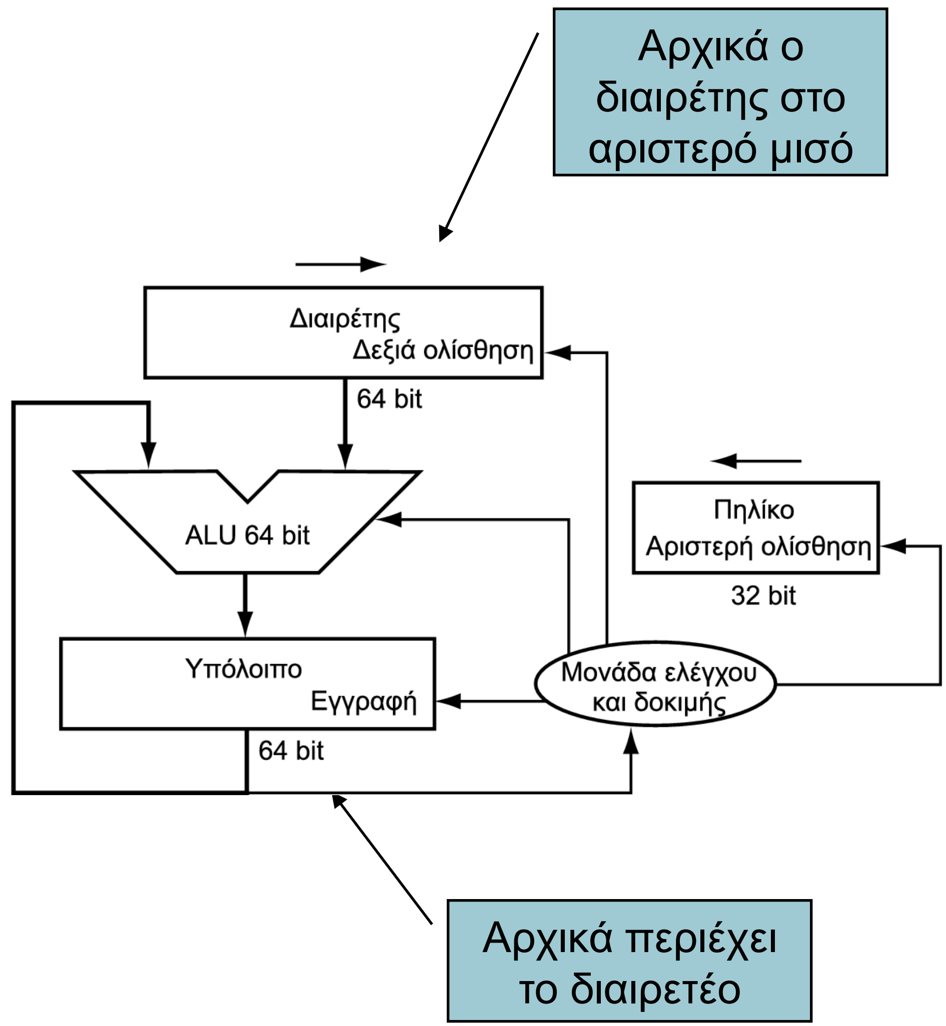
υπόλοιπο

τελεστέοι των *n* bit δίνουν πηλίκο και υπόλοιπο των *n* bit

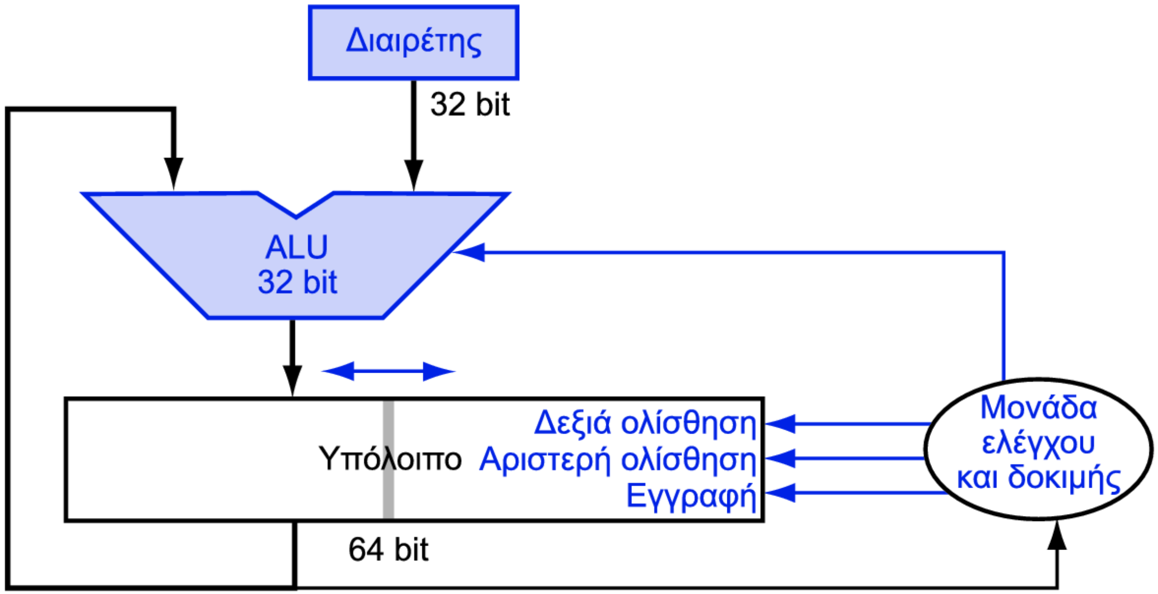
- Έλεγχος για μηδενικό διαιρέτη
- Διαίρεση μεγάλου μήκους
  - Αν διαιρέτης ≤ από τα bit του διαιρετέου
    - 1 bit στο πηλίκο, αφαίρεση
  - Αλλιώς
    - 0 bit στο πηλίκο, κατέβασμα του επόμενου bit του διαιρετέου
- Διαίρεση με επαναφορά (restoring division)
  - Κάνε την αφαίρεση και αν το υπόλοιπο γίνει < 0, πρόσθεσε πίσω το διαιρέτη
- Προσημασμένη διαίρεση
  - Κάνε τη διαίρεση με τις απόλυτες τιμές
  - Ρύθμισε το πρόσημο του πηλίκου και του υπολοίπου όπως απαιτείται

Υλικό διαίρεσης





Βελτιστοποιημένος διαιρέτης



- Ένας κύκλος για κάθε αφαίρεση μερικού υπολοίπου
- Μοιάζει πολύ με πολλαπλασιαστή!
  - Το ίδιο υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τις δύο πράξεις

Ταχύτερη διαίρεση

- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί παράλληλο υλικό όπως στον πολλαπλασιαστή
  - Η αφαίρεση εκτελείται υπό συνθήκη, ανάλογα με το πρόσημο του υπολοίπου
- Ταχύτεροι διαιρέτες (π.χ. διαίρεση SRT) δημιουργούν πολλά bit του πηλίκου σε κάθε βήμα
  - Και πάλι απαιτούνται πολλά βήματα

Διαίρεση στο MIPS

- Χρήση των καταχωρητών HI/LO για το αποτέλεσμα
  - HI: υπόλοιπο 32 bit
  - LO: πηλίκο 32 bit
- Εντολές
  - `div rs, rt  /  divu rs, rt`
  - Όχι έλεγχος για υπερχείλιση ή διαίρεση με το 0
    - Το λογισμικό πρέπει να εκτελεί τους ελέγχους αν αυτό απαιτείται
  - Χρήση των `mfhi`, `mflo` για προσπέλαση του αποτελέσματος

Κινητή υποδιαστολή

- Αναπαράσταση για μη ακεραίους αριθμούς
  - Περιλαμβάνει και πολύ μικρούς και πολύ μεγάλους αριθμούς
- Όπως η επιστημονική σημειογραφία (scientific notation)
  - -2.34×10^{56}
  - $+0.002 \times 10^{-4}$
  - $+987.02 \times 10^{9}$

κανονικοποιημένος

μη κανονικοποιημένος

- Σε δυαδικό
  - $\pm 1.xxxxxxx_2 \times 2^{yyyy}$
- Οι τύποι `float` και `double` της C

Πρότυπο κινητής υποδιαστολής

- Ορίζεται από το IEEE Std 754-1985
- Αναπτύχθηκε ως λύση στην απόκλιση των αναπαραστάσεων
  - Ζητήματα φορητότητας (portability) για τον κώδικα επιστημονικών εφαρμογών
- Πλέον είναι σχεδόν οικουμενικά αποδεκτό
- Δύο αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής (floating point)
  - Απλή ακρίβεια – single precision (32 bit)
  - Διπλή ακρίβεια – double precision (64 bit)

Μορφή κινητής υποδιαστολής IEEE

	single: 8 bit double: 11 bit	single: 23 bit double: 52 bit
S	Εκθέτης	Κλάσμα

$$x = (-1)^S \times (1 + \text{Κλάσμα}) \times 2^{(\text{Εκθέτης} - \text{Πόλωση})}$$

- Εκθέτης (exponent) – Κλάσμα (fraction)
- S: bit προσήμου (0 $\Rightarrow$ μη αρνητικός, 1 $\Rightarrow$ αρνητικός)
- Κανονικοποίηση του σημαντικού (significand): $1.0 \leq |\text{significand}| < 2.0$
  - Έχει πάντα ένα αρχικό bit 1 πριν την υποδιαστολή, και συνεπώς δε χρειάζεται ρητή αναπαράστασή του («κρυμμένο» bit)
  - Το σημαντικό (significand) είναι το κλάσμα (fraction) μαζί με το κρυμμένο “1”
- Εκθέτης: αναπαράσταση «με υπέρβαση» (excess): πραγματικός εκθέτης + πόλωση (bias)
  - Εγγυάται ότι ο εκθέτης είναι απρόσημος
  - Απλή ακρίβεια: Πόλωση = 127 – Διπλή ακρίβεια: Πόλωση = 1023

Εύρος απλής ακρίβειας

- Οι εκθέτες 00000000 και 11111111 δεσμεύονται
- Μικρότερη τιμή
  - Εκθέτης: 00000001
    ⇒ πραγματικός εκθέτης = 1 – 127 = –126
  - Κλάσμα: 000…00 ⇒ σημαντικό = 1.0
  - $\pm 1.0 \times 2^{-126} \approx \pm 1.2 \times 10^{-38}$
- Μεγαλύτερη τιμή
  - Εκθέτης: 11111110
    ⇒ πραγματικός εκθέτης = 254 – 127 = +127
  - Κλάσμα: 111…11 ⇒ σημαντικό ≈ 2.0
  - $\pm 2.0 \times 2^{+127} \approx \pm 3.4 \times 10^{+38}$

Εύρος διπλής ακρίβειας

- Οι εκθέτες 0000…00 και 1111…11 δεσμεύονται
- Μικρότερη τιμή
  - Εκθέτης: 00000000001
    $\Rightarrow$ πραγματικός = 1 – 1023 = –1022
  - Κλάσμα: 000…00 $\Rightarrow$ σημαντικό = 1.0
  - $\pm 1.0 \times 2^{-1022} \approx \pm 2.2 \times 10^{-308}$
- Μεγαλύτερη τιμή
  - Εκθέτης: 11111111110
    $\Rightarrow$ πραγματικός εκθέτης = 2046 – 1023 = +1023
  - Κλάσμα: 111…11 $\Rightarrow$ σημαντικό ≈ 2.0
  - $\pm 2.0 \times 2^{+1023} \approx \pm 1.8 \times 10^{+308}$

Ακρίβεια κινητής υποδιαστολής

- Σχετική ακρίβεια
  - Όλα τα bit του κλάσματος είναι σημαντικά
  - Απλή: περίπου 2^{-23}
    - Ισοδύναμο με $23 \times \log_{10}2 \approx 23 \times 0.3 \approx 6$ δεκαδικά ψηφία ακρίβειας
  - Διπλή: περίπου 2^{-52}
    - Ισοδύναμο με $52 \times \log_{10}2 \approx 52 \times 0.3 \approx 16$ δεκαδικά ψηφία ακρίβειας

Παράδειγμα κινητής υποδιαστολής

- Αναπαράσταση του –0.75
  - $-0.75 = (-1)^1 \times 1.1_2 \times 2^{-1}$
  - S = 1
  - Κλάσμα = $1000\ldots00_2$
  - Εκθέτης = –1 + Πόλωση
    - Απλή: $-1 + 127 = 126 = 01111110_2$
    - Διπλή: $-1 + 1023 = 1022 = 01111111110_2$
- Απλή: 1011111101000…00
- Διπλή: 1011111111101000…00

Παράδειγμα κινητής υποδιαστολής

- Ποιος αριθμός αναπαρίσταται από τον απλής ακρίβειας κινητής υποδιαστολής αριθμό;

  11000000101000…00

  - S = 1
  - Κλάσμα = $01000\ldots00_2$
  - Εκθέτης = $10000001_2 = 129$
- $x = (-1)^1 \times (1 + 01_2) \times 2^{(129 - 127)}$

  $= (-1) \times 1.25 \times 2^2$

  $= -5.0$

Μη κανονικοποιημένοι (denormals)

- Εκθέτης = 000...0 $\Rightarrow$ το «κρυμμένο» bit είναι 0

$$x = (-1)^S \times (0 + \text{Κλάσμα}) \times 2^{-\text{Πόλωση}}$$

- Μικρότεροι από τους κανονικοποιημένους
  - επιτρέπουν βαθμιαία ανεπάρκεια (gradual underflow), με μειούμενη ακρίβεια

- Denormal με κλάσμα = 000...0

$$x = (-1)^S \times (0 + 0) \times 2^{-\text{Πόλωση}} = \pm\, 0.0$$

Δύο αναπαραστάσεις του 0.0!

Άπειρα και όχι αριθμοί (NaN)

- Εκθέτης = 111…1, Κλάσμα = 000…0
  - ±Άπειρο
  - Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε επόμενους υπολογισμούς, για αποφυγή της ανάγκης του ελέγχου υπερχείλισης
- Εκθέτης = 111…1, Κλάσμα ≠ 000…0
  - Όχι αριθμός (Not-a-Number – NaN)
  - Δείχνει ένα άκυρο ή απροσδιόριστο αποτέλεσμα
    - π.χ., 0.0 / 0.0
  - Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε επόμενους υπολογισμούς

Πρόσθεση κινητής υποδιαστολής

- Ένα δεκαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
  - $9.999 \times 10^{1} + 1.610 \times 10^{-1}$
- 1. Ευθυγράμμιση υποδιαστολών
  - Ολίσθηση αριθμού με το μικρότερο εκθέτη
  - $9.999 \times 10^{1} + 0.016 \times 10^{1}$
- 2. Πρόσθεση σημαντικών
  - $9.999 \times 10^{1} + 0.016 \times 10^{1} = 10.015 \times 10^{1}$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος & έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
  - 1.0015×10^{2}
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποιήση αν είναι απαραίτητο
  - 1.002×10^{2}

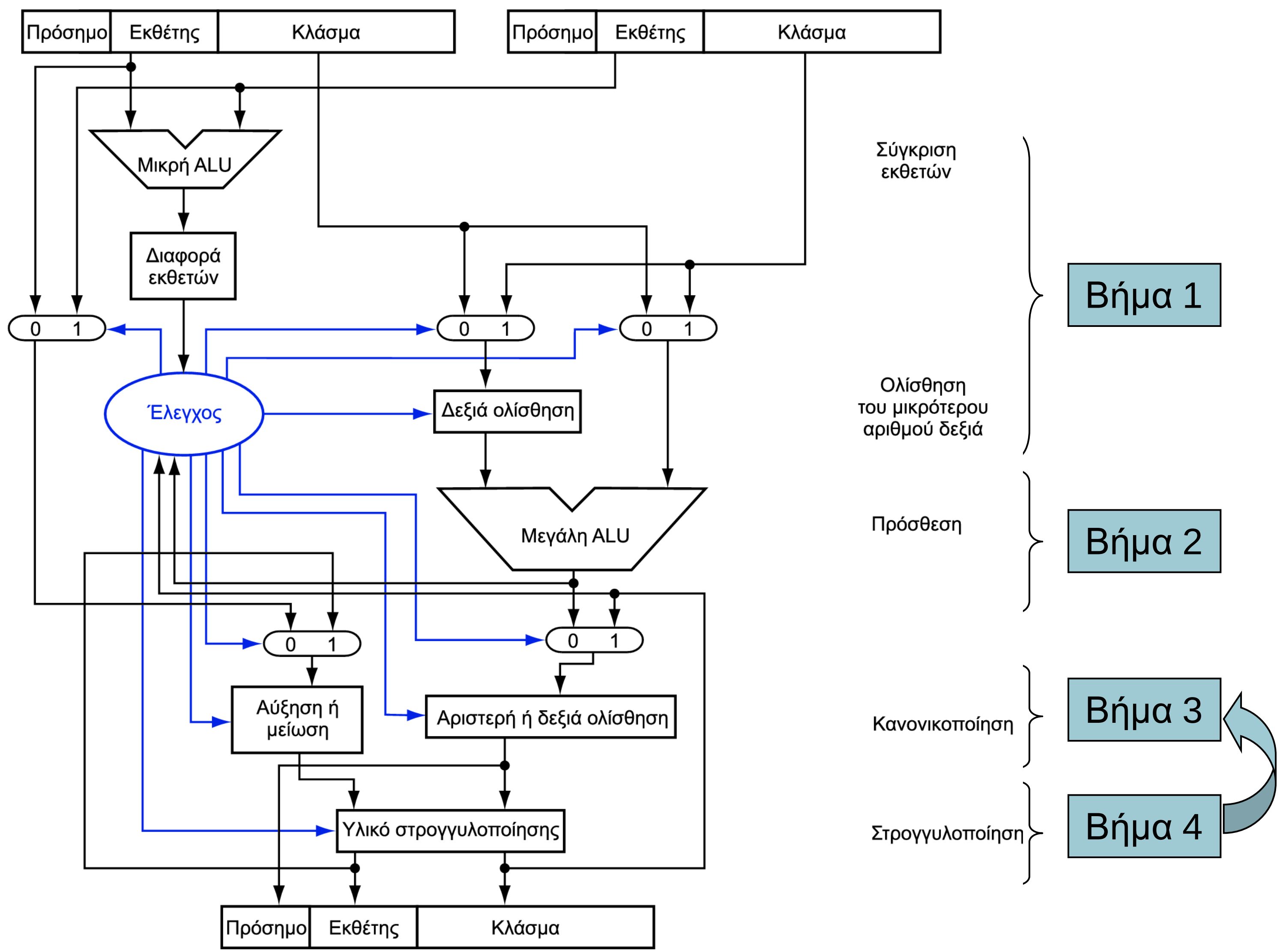
Πρόσθεση κινητής υποδιαστολής

- Τώρα ένα δυαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -1.110_2 \times 2^{-2}$ (0.5 + –0.4375)
- 1. Ευθυγράμμιση υποδιαστολών
  - Ολίσθηση αριθμού με το μικρότερο εκθέτη
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1}$
- 2. Πρόσθεση σημαντικών
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1} = 0.001_2 \times 2^{-1}$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος και έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
  - $1.000_2 \times 2^{-4}$, χωρίς υπερχείλιση/ανεπάρκεια
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποιήση αν είναι απαραίτητο
  - $1.000_2 \times 2^{-4}$ (καμία αλλαγή) $= 0.0625$

Υλικό αθροιστή κιν. υποδ.

- Πολύ πιο πολύπλοκο από του ακέραιου αθροιστή
- Για να γίνει σε έναν κύκλο πρέπει να έχει πολύ μεγάλη διάρκεια
  - Πολύ μεγαλύτερη από τις ακέραιες λειτουργίες
  - Το πιο αργό ρολόι θα επιβάρυνε όλες τις εντολές
- Ο αθροιστής κινητής υποδιαστολής συνήθως παίρνει πολλούς κύκλους
  - Μπορεί να υπολοποιηθεί με διοχέτευση

Υλικό αθροιστή κιν.υποδ.



Πολλαπλασιασμός κιν.υποδ.

- Ένα δεκαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
  - $1.110 \times 10^{10} \times 9.200 \times 10^{-5}$
- 1. Πρόσθεση εκθετών
  - Για πολωμένους εκθέτες, αφαίρεση της πόλωσης από το άθροισμα
  - Νέος εκθέτης = 10 + –5 = 5
- 2. Πολλαπλασιασμός σημαντικών
  - $1.110 \times 9.200 = 10.212 \;\Rightarrow\; 10.212 \times 10^{5}$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος & έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
  - 1.0212×10^{6}
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποίηση αν είναι απαραίτητο
  - 1.021×10^{6}
- 5. Καθορισμός του προσήμου του αποτελέσματος από τα πρόσημα των τελεστέων
  - $+1.021 \times 10^{6}$

Πολλαπλασιασμός κιν.υποδ.

- Τώρα ένα δυαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
  - $1.000_2 \times 2^{-1} \times -1.110_2 \times 2^{-2}$ (0.5 × –0.4375)
- 1. Πρόσθεση εκθετών
  - Χωρίς πόλωση: –1 + –2 = –3
  - Με πόλωση: (–1 + 127) + (–2 + 127) = –3 + 254 – 127 = –3 + 127
- 2. Πολλαπλασιασμός σημαντικών
  - $1.000_2 \times 1.110_2 = 1.1102 \Rightarrow 1.110_2 \times 2^{-3}$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος και έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
  - $1.110_2 \times 2^{-3}$ (καμία αλλαγή) χωρίς υπερχείλιση/ανεπάρκεια
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποίηση αν είναι απαραίτητο
  - $1.110_2 \times 2^{-3}$ (καμία αλλαγή)
- 5. Καθορισμός προσήμου: +ve × –ve ⇒ –ve
  - $-1.110_2 \times 2^{-3} = -0.21875$

Υλικό αριθμητικής κιν. υποδ.

- Ο πολλαπλασιαστής ΚΥ έχει παρόμοια πολυπλοκότητα με τον αθροιστή ΚΥ
  - Αλλά χρησιμοποιεί πολλαπλασιαστή για τα σημαντικά αντί για αθροιστή
- Το υλικό αριθμητικής κιν. υποδ. συνήθως εκτελεί
  - Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, αντίστροφο, τετραγωνική ρίζα
  - Μετατροπή ΚΥ ↔ ακέραιο
- Οι λειτουργίες συνήθως διαρκούν πολλούς κύκλους
  - Μπορούν να υπολοποιηθούν με διοχέτευση

Εντολές ΚΥ στο MIPS

- Το υλικό ΚΥ είναι ο συνεπεξεργαστής (coprocessor) 1
  - Επιπρόσθετος επεξεργαστής που επεκτείνει την αρχιτεκτονική συνόλου εντολών
- Ξεχωριστοί καταχωρητές ΚΥ
  - 32 απλής ακρίβειας: \$f0, \$f1, … \$f31
  - Ζευγάρια για διπλή ακρίβεια: \$f0/\$f1, \$f2/\$f3, …
    - Η έκδοση 2 του συνόλου εντολών MIPS υποστηρίζει 32 × 64 bit καταχωρητές ΚΥ
- Εντολές ΚΥ επενεργούν μόνο σε καταχωρητές ΚΥ
  - Γενικά τα προγράμματα δεν εκτελούν ακέραιες πράξεις σε δεδομένα ΚΥ, ή αντίστροφα
  - Περισσότεροι καταχωρητές με ελάχιστη επίδραση στο μέγεθος του κώδικα
- Εντολές φόρτωσης και αποθήκευσης ΚΥ
  - `lwc1`, `ldc1`, `swc1`, `sdc1`
    - π.χ., `ldc1 $f8, 32($sp)`

Εντολές ΚΥ στον MIPS

- Αριθμητική απλής ακρίβειας
  - `add.s`, `sub.s`, `mul.s`, div.s
    - π.χ., `add.s $f0, $f1, $f6`
- Αριθμητική διπλής ακρίβειας
  - `add.d`, `sub.d`, `mul.d`, `div.d`
    - π.χ., `mul.d $f4, $f4, $f6`
- Σύγκριση απλής και διπλής ακρίβειας
  - `c.`*`xx`*`.s`, `c.`*`xx`*`.d` (*xx* είναι eq, `lt`, `le`, …)
  - Δίνει τη τιμή 1 ή 0 σε bit κωδικών συνθήκης ΚΥ (FP condition-code bit)
    - π.χ. `c.lt.s $f3, $f4`
- Διακλάδωση σε αληθή ή ψευδή κωδικό συνθήκης ΚΥ
  - `bc1t`, `bc1f`
    - π.χ., `bc1t TargetLabel`

Παραδειγμα ΚΥ: βαθμοί °F σε °C

- Κώδικας C:

```
float f2c (float fahr) {
  return ((5.0/9.0)*(fahr - 32.0));
}
```

  - `fahr` στον \$f12, αποτέλεσμα στον \$f0, οι σταθερές στο χώρο της καθολικής μνήμης

- Μεταγλωττισμένος κώδικας MIPS:

```
f2c: lwc1  $f16, const5($gp)
     lwc2  $f18, const9($gp)
     div.s $f16, $f16, $f18
     lwc1  $f18, const32($gp)
     sub.s $f18, $f12, $f18
     mul.s $f0,  $f16, $f18
     jr    $ra
```

Παράδειγμα ΚΥ: Πολλαπλασιασμός πινάκων

- X = X + Y × Z
  - Όλοι πίνακες 32 × 32, με στοιχεία 64 bit διπλής ακρίβειας
- Κώδικας C:

```
void mm (double x[][],
         double y[][], double z[][]) {
  int i, j, k;
  for (i = 0; i! = 32; i = i + 1)
    for (j = 0; j! = 32; j = j + 1)
      for (k = 0; k! = 32; k = k + 1)
        x[i][j] = x[i][j]
                  + y[i][k] * z[k][j];
}
```

  - Διευθύνσεις των x, y, z στους \$a0, \$a1, \$a2, και των i, j, k στους \$s0, \$s1, \$s2

Παράδειγμα ΚΥ: Πολλαπλασιασμός πινάκων

- Κώδικας MIPS:

```
    li   $t1, 32         # $t1 = 32 (row size/loop end)
    li   $s0, 0          # i = 0; initialize 1st for loop
L1: li   $s1, 0          # j = 0; restart 2nd for loop
L2: li   $s2, 0          # k = 0; restart 3rd for loop
    sll  $t2, $s0, 5     # $t2 = i * 32 (size of row of x)
    addu $t2, $t2, $s1   # $t2 = i * size(row) + j
    sll  $t2, $t2, 3     # $t2 = byte offset of [i][j]
    addu $t2, $a0, $t2   # $t2 = byte address of x[i][j]
    l.d  $f4, 0($t2)     # $f4 = 8 bytes of x[i][j]
L3: sll  $t0, $s2, 5     # $t0 = k * 32 (size of row of z)
    addu $t0, $t0, $s1   # $t0 = k * size(row) + j
    sll  $t0, $t0, 3     # $t0 = byte offset of [k][j]
    addu $t0, $a2, $t0   # $t0 = byte address of z[k][j]
    l.d  $f16, 0($t0)    # $f16 = 8 bytes of z[k][j]
    …
```

Παράδειγμα ΚΥ: Πολλαπλασιασμός πινάκων

…

```
sll   $t0, $s0, 5        # $t0 = i*32 (size of row of y)
addu  $t0, $t0, $s2      # $t0 = i*size(row) + k
sll   $t0, $t0, 3        # $t0 = byte offset of [i][k]
addu  $t0, $a1, $t0      # $t0 = byte address of y[i][k]
l.d   $f18, 0($t0)       # $f18 = 8 bytes of y[i][k]
mul.d $f16, $f18, $f16 # $f16 = y[i][k] * z[k][j]
add.d $f4, $f4, $f16     # f4=x[i][j] + y[i][k]*z[k][j]
addiu $s2, $s2, 1        # $k k + 1
bne   $s2, $t1, L3       # if (k != 32) go to L3
s.d   $f4, 0($t2)        # x[i][j] = $f4
addiu $s1, $s1, 1        # $j = j + 1
bne   $s1, $t1, L2       # if (j != 32) go to L2
addiu $s0, $s0, 1        # $i = i + 1
bne   $s0, $t1, L1       # if (i != 32) go to L1
```

Διερμηνεία των δεδομένων

ΓΕΝΙΚΗ εικόνα

- Τα bit δεν έχουν έμφυτη σημασία
  - Η διερμηνεία εξαρτάται από τις εντολές που εφαρμόζονται
- Αναπαράσταση των αριθμών στους υπολογιστές
  - Πεπερασμένο εύρος και ακρίβεια
  - Πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στα προγράμματα

Προσεταιριστικότητα

- Τα παράλληλα προγράμματα μπορεί να «πλέκουν» τις λειτουργίες με μη αναμενόμενη σειρά
  - υποθέσεις προσεταιριστικότητας μπορεί να αποτύχουν

		(x+y)+z	x+(y+z)
x	-1.50E+38		-1.50E+38
y	1.50E+38	0.00E+00	
z	1.0	1.0	1.50E+38
		1.00E+00	0.00E+00

- Πρέπει να επιβεβαιώνεται η λειτουργία των παράλληλων προγραμμάτων σε διαφορετικούς βαθμούς παραλληλίας

Αρχιτεκτονική ΚΥ του x86

- Αρχικά βασίζονταν στο συνεπεξεργαστή ΚΥ 8087
  - 8 × 80 bit καταχωρητές επεκτεταμένης ακρίβειας (extended-precision)
  - Χρησιμοποιούνται ως στοίβα
  - Καταχωρητές δεικτοδοτούνται από την κορυφή της στοίβας (TOS) ως: ST(0), ST(1), …
- Οι τιμές ΚΥ είναι 32 ή 64 bit στη μνήμη
  - Μετατρέπονται κατά τη φόρτωση/αποθήκευση τελεστέων μνήμης
  - Οι ακέραιοι τελεστέοι μπορούν επίσης να μετατραπούν σε μια φόρτωση/αποθήκευση
- Πολύ δύσκολη δημιουργία και βελτιστοποίηση κώδικα
  - Αποτέλεσμα: φτωχή απόδοση ΚΥ

Εντολές ΚΥ του x86

Μεταφορά δεδομένων	Αριθμητικές	Σύγκρισης	Υπερβατικές
FILD mem/ST(i) FISTP mem/ST(i) FLDPI FLD1 FLDZ	FIADDP mem/ST(i) FISUBRP mem/ST(i) FIMULP mem/ST(i) FIDIVRP mem/ST(i) FSQRT FABS FRNDINT	FICOMP FIUCOMP FSTSW AX/mem	FPATAN F2XMI FCOS FPTAN FPREM FPSIN FYL2X

- Προαιρετικές παραλλαγές
  - I: ακέραιος τελεστέος
  - P: εξαγωγή (pop) τελεστέου από τη στοίβα
  - R: αντίστροφη σειρά τελεστέων
  - Αλλά δεν επιτρέπονται όλοι οι συνδυασμοί

Streaming SIMD Extension 2 (SSE2)

- Επέκταση συνεχούς ροής SIMD 2 (SSE2)
- Προσθέτει 4 × 128 bit καταχωρητές
  - Επεκτάθηκε σε 8 καταχωρητές στην AMD64/EM64T
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολλούς τελεστέους ΚΥ
  - 2 × 64 bit διπλής ακρίβειας
  - 4 × 32 bit απλής ακρίβειας
  - Οι εντολές επενεργούν σε αυτά ταυτόχρονα
    - Μία εντολή πολλά δεδομένα (Single-Instruction Multiple-Data)

Δεξιά ολίσθηση και διαίρεση

- Η αριστερή ολίσθηση κατά *i* θέσεις πολλαπλασιάζει έναν ακέραιο με 2^i
- Η δεξιά ολίσθηση διαιρεί με το 2^i ;
  - Μόνο σε απρόσημους ακεραίους
- Για προσημασμένους ακεραίους
  - Αριθμητική δεξιά ολίσθηση: επανάληψη του προσήμου
  - π.χ., –5 / 4
    - 11111011_2 >> 2 = 11111110_2 = –2
    - Στρογγυλοποιεί προς το –∞
  - σύγκριση 11111011_2 >>> 2 = 00111110_2 = +62

Ποιος νοιάζεται για την ακρίβεια ΚΥ;

- Σημαντική για επιστημονικό κώδικα
  - Αλλά για καθημερινή χρήση;
    - “Το υπόλοιπό μου στη τράπεζα διαφέρει κατά 0.0002 σεντ!” ☹
- Το σφάλμα της διαίρεσης ΚΥ του Intel Pentium (FDIV bug)
  - Η αγορά αναμένει ακρίβεια
  - Δείτε Colwell, *The Pentium Chronicles*

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

- Οι αρχιτεκτονικές συνόλου εντολών υποστηρίζουν αριθμητική
  - Προσημασμένων και απρόσημων ακεραίων
  - Προσεγγίσεων κινητής υποδιαστολής για τους πραγματικούς
- Πεπερασμένο εύρος και ακρίβεια
  - Οι λειτουργίες μπορεί να οδηγήσουν σε υπερχείλιση (overflow) και ανεπάρκεια (underflow)
- Αρχιτεκτονική συνόλου εντολών MIPS
  - Εντολές πυρήνα: οι 54 πιο συχνά χρησιμοποιούμενες
    - 100% του SPECINT, 97% του SPECFP
  - Άλλες εντολές: λιγότερο συχνές